Научный поиск: личность, образование, культура. 2021. № 4. С. 39–47.
Scientific search: personality, education, culture. 2021. no. 4. pp. 39–47.

ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Научная статья
УДК 159.955:372.851
ББК 88.835.13+74.262
https://doi.org/10.54348/2021.4.6

Формальная логика как механизм восхождения на теоретический уровень мышления

Сергей Рувимович Когаловский
Ивановский государственный университет, Иваново, Россия, askogal@yandex.ru

Аннотация. Каковы роли формально-логических средств в процессах формирования и освоения ведущих понятий школьного курса математики? Эти вопросы мы анализируем на примере процесса формирования понятия предела числовой последовательности. Описываемый процесс широко использует средства логической семантики. Формальная логика в нем функционирует как семантико-синтаксический инструмент, как неразделимое единство синтаксического и семантического планов при ведущей роли семантического плана, а значит, при ведущей роли смыслового начала и тем самым при ведущей роли механизмов понимания. Идеальный мир, в который погружается рассмотрение «очищающими» средствами формальной логики, становится идеальным полигоном для испытаний сформированного понятия на эффективность, для совершенствования его формы, для расширения возможностей его применения, для наращивания его «дальнодействия», для наращивания «дальновидения» субъекта поисково-исследовательской деятельности. Погружение в такой «мир» несет возможность столкновений с качественно новыми ситуациями, возможность *конструировать* и исследовать такие ситуации. Семантический инструмент преображает механизмы ориентировки и метаориентировки, преображает способ поисково-исследовательской деятельности. Он превращает формальную логику в носитель креативности, в орудие более далеко идущего развития математических способностей учащихся, а с ним их общего интеллектуального развития.

Ключевые слова: обучение математике, эмпирическое мышление, теоретическое мышление, формальная логика, логическая семантика, смысловые скачки, преображение способа мышления.
Для цитирования: Когаловский С. Р. Формальная логика как механизм восхождения на теоретический уровень мышления // Научный поиск: личность, образование, культура. 2021. № 4. С. 39–47. https://doi.org/10.54348/2021.4.6

Original article

Formal logic as a mechanism of exaltation to the theoretical level of thinking

Sergey R. Kogalovsky
Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, askogal@yandex.ru

Abstract. What is the role of formal-logical means in the processes of formation and development of the leading concepts of school mathematics course? We analyze these questions on the example of the formation of the concept of the limit of a numerical sequence. Logical semantics is widely used in the described process. Formal logic acts in it as a semantic-syntactic tool, as an inseparable unity of syntactic and semantic plans with the leading role of the semantic plan and, consequently, with the leading role of the semantic principle and, consequently, with the leading role of understanding mechanisms. The ideal world into which consideration is immersed with the help of "cleansing" means of formal logic becomes an ideal testing ground for testing the formed concept for efficiency, for improving its form, for expanding possibilities of its application, for increasing its "range of action", for increasing "range of vision" of the subject of search and research activity. Immersion in such a "world" brings the possibility of encountering qualitatively new situations, the possibility of designing and exploring such situations. The semantic tool transforms the mechanisms of orientation and metaorientation, transforming the way we investigate. It transforms formal logic into a carrier of creativity, a tool for the larger development of students' mathematical abilities, and with them their general intellectual development.

Keywords: teaching mathematics, empirical thinking, theoretical thinking, formal logic, logical semantics, semantic jumps, transfiguration of the method of thinking.

For citation: Kogalovskii S. R. Formal logic as a mechanism of exaltation to the theoretical level of thinking. *Nauchnyj poisk: lichnost', obrazovanie, kul'tura = Scientific search: personality, education, culture.* 2021. no. 4. pp. 39–47. (In Russ). https://doi.org/10.54348/2021.4.6

Актуальность. Каковы роли формально-логических средств в процессах формирования и освоения ведущих понятий школьного курса математики, являющихся его несущим каркасом? Блокируют они развитие теоретического мышления учащихся или способствуют ему? Блокируют они творческое начало или способствуют ему? Эти вопросы мы проанализируем здесь начальным образом на примере процесса формирования понятия предела (числовой) последовательности. Наши рассмотрения послужат и иллюстрациями к статье [Когаловский, 2021]. В силу ограниченности допустимого объема статья будет носить конспективный характер. Раскрытию ряда технических, и не только технических, деталей может помочь, например, обращение к статье [Когаловский, 2013] или к монографии [Когаловский, 2018], в которых содержатся сценарии таких процессов. В заметке приводятся несколько модифицированные фрагменты этих сценариев, сопровождаемые необходимыми комментариями, относящимися к названным вопросам.

Методы и организация исследования. Описываемый в статье процесс восхождения к понятию предела последовательности, как и описываемые в [Когаловский, 2018] процессы восхождений к другим ведущим понятиям школьного курса математики, предстают в форме сократических диалогов. Они подобны и процессам феноменологической редукции в смысле Гуссерля (см. [Когаловский, 2018, с. 161 -165]). Они выступают и как эффективные и «природосообразные» средства коммуникации в учебной деятельности, и как эффективные и «природосообразные» средства расширения и обогащения контекста рассмотрения, и как эффективные и «природосообразные» средства восхождения на метапредметные и метатеоретический уровни рассмотрения.

Названному процессу предшествует созидание «предыстории» формируемого понятия как опыта деятельности на наивном уровне, основанной на обращении к начальным, нечетким, синкретичным представлениям о предельном переходе, на рассмотрении последовательностей, подобных следующим: 1, 1/2, 1/3, …; 1, -1/2, 1/3, -1/4, …; 2/1, 3/2, 4/3, …; 0,1, 0,11, 0,111, 0,1111, …; 1, 2, 3, 4, …; 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, …; 1, -2, 1/2, 1/3, 1/4,…

Урезание такого начала, его низведение до уровня предварительных пояснений несло бы трудно восполнимые потери в деле собственно математического и общего интеллектуального развития учащихся.

*Задача 1***.** Найти предел последовательности **c**, образуемой из последовательностей **a:** 1**,** 1/2,1/3, … и **b:** 2/1, 3/2, 4/3, … следующим образом: для всякого n между членом с номером 2^n и следующим за ним членом последовательности **a** вставляется n-й член последовательности **b**.

– Чем далее, тем все реже в последовательности **c** *появляются члены последовательности* **b**. *И где-то очень далеко, там, где номера членов* **c** *непредставимо огромны, члены* **b** *появляются настолько редко, настолько исчезающе редко, что последовательность* **c** *почти не отличается от последовательности* **a**. *Значит, она приближается к тому же числу, что и* **a**. *То есть ее предел равен 0.*

– Хоть члены **b** *появляются в* **c** *все реже, они появляются как угодно далеко. Какой бы огромный номер мы ни взяли, у последовательности* **c** *имеются члены с еще большими номерами, взятые из последовательности* **b**. *И чем далее, тем ближе такие члены к числу 1, а не к 0. Так что едва ли* **c** *имеет предел 0.*

– Может быть, предел **c** *равен 1?*

– И на это не похоже. Ведь в этой последовательности намного чаще появляются члены из **a**, *которые становятся все ближе к 0, а не к 1.*

– А не являются ли и 0 *и* 1 *ее пределами?*

– Но разве может последовательность одновременно приближаться к двум разным числам?

– А разве наша последовательность не является тому примером?

– Может быть, кто-нибудь располагает убедительным доказательством истинности илиложности какого-нибудь из высказанных утверждений или предположений о сходимости рассматриваемой последовательности?

Никто? Чем же объясняется неумение решить нашу задачу, не связанную с какими-либо техническими сложностями? Не тем ли, что наши представления о том, что такое предел последовательности, недостаточно четкие?

Да и могут ли они стать достаточно четкими на базе рассмотрения лишь тривиальных ситуаций? Разве возможно приведение учащихся к осознанию необходимости строгости на базе столь скудного их опыта? (Здесь уместно вспомнить тезис Гераклита «Скот гонит к корму бич необходимости»).

Не разумней ли либо с самого начала приобщить учащихся к строгому понятию предела последовательности, а затем наращивать опыт его использования, либо начинать с наращивания опыта использования первичных представлений о пределе последовательности, привлекая к рассмотрению нетривиальные ситуации?

Первый из этих вариантов настолько же широко распространен, насколько и непродуктивен уже потому, что определение (строгого) понятия предела последовательности имеет высокий уровень логической сложности. Сложность его освоения снимается процессом восхождения к нему от начальных представлений о пределе последовательности. Такие процессы являются продуктивным и «природосообразным» методом освоения ведущих математических понятий. Попытки же снятия названной сложности пояснениями на тривиальных примерах приводят лишь к формированию у учащихся начальных, наивных представлений о пределе последовательности, но не ведут к осознанию необходимости их уточнения и потому обращение к определению понятия предела воспринимается ими как мертвый ритуал.

Второй вариант приводит к существенному усложнению формирования начальных представлений учащихся о пределе последовательности. Он приводит к усложнению процесса восхождения к понятию предела последовательности от начальных представлений о пределе последовательности и не способствует постижению учащимися логики этого процесса.

Задача 2. Пусть **a** и **b** – те же последовательности, что и в задаче 1. Найти предел последовательности **d,** строящейся так: в последовательности **a** между ее членами с номерами 2^1 и 2^1+1 вставляется 10 первых членов последовательности **b**, между членами с номерами 2^2 и 2^2+1 вставляется 10^2 следующих членов последовательности **b**, между членами с номерами 2^3 и 2^3+1 вставляется 10^3 следующих членов из **b**, и т.д.

– Вставляемые в **a** *блоки членов из* **b** *появляются все реже (так же, как члены геометрической прогрессии* 10, 10^2, 10^3, 10^4,... *все реже появляются в последовательности* 1,2,3,,...*). Следовательно, чем дальше, тем все больше последовательность* **d** *становится похожей на последовательность* **a**. *Значит, у этих последовательностей предел один и тот же.*

– Но хоть блоки членов из **b** *появляются в* **d** *все реже, они появляются бесконечно много раз, они появляются как угодно далеко. И чем далее, тем ближе члены из таких блоков к 1, а не к 0. Так что не похоже, что* **d** *имеет предел 0.*

– К тому же хоть блоки из **b** *появляются в* **d** *все реже, но они все длиннее. Каждый блок из* **b** *содержит большее число членов, чем число всех предшествующих ему членов из* **a**. *Так что чем дальше, тем последовательность* **d** *становится все более похожей на* **b**. *А значит, ее предел равен 1.*

– А может быть, и 0 *и* 1 *являются ее пределами?*

– Но разве может последовательность одновременно приближаться к двум разным числам?

– А разве наша последовательность не является тому примером?

– Все эти аргументы не позволяют ни доказать, ни опровергнуть никакое из высказанных утверждений о последовательности **d**. *Они ничем не лучше аргументов, высказанных при обсуждении задачи 1. А рассматриваемая задача тоньше. Не говорит ли это, и еще более явственно, о том, что наши представления о сходимости последовательности недостаточно четкие, что необходимо их уточнение, их прояснение?*

Переходу к следующей стадии процесса (подобной эйдетической редукции по Гуссерлю) предпошлем фрагмент статьи [Когаловский, 2021]: «Что такое касательная к линии в данной точке?», «Что такое вероятность события?», «Что такое предел последовательности?» – подобная постановка вопроса рождает смысловой скачок, несущий опредмечивание деятельного, инструментального начала и посредством этого погружение в пространство более первичных, «корневых» значений и смыслов. Это начало восхождения от обыденных представлений на уровень теоретического мышления, становящееся и началом восхождения к работе формально-логических средств. Это начало восхождения к работе формально-логических средств, становящееся началом восхождения от обыденных представлений на уровень теоретического мышления. Это начало овнешнения, начало опредмечивания работы скрытых механизмов мышления, прячущихся за эмпирической формой мышления. Это начало восхождения к строгому понятию».

– Попытаемся уточнить наши представления о пределе последовательности. Что значит, что последовательность **f:** f_1, f_2, f_3, … *имеет предел* A?

– То, что с возрастанием n *ее члены,* f_n *, становятся все ближе к* A.

– Как точнее выразить это условие, не используя слово «становится», имеющее не вполне четкий смысл?

– Очень просто: чем больше номер n, тем ближе f_n *к* A.

– При таком понимании предела последовательности всякое число A, *большее 1, является пределом последовательности* 0,9, 0,99, 0,999… *Ведь чем больше* n, *тем ближе* f_n *к* A. *Но естественно ли такое понимание предела*?

– Я имею в виду такое приближение f_n *к* A, *что* f_n *становятся как угодно близкими к* A.

– Что значит «становятся как угодно близкими к A»?

– Это значит, что все члены **f**, *начиная с какого-то, отличаются от* A *меньше чем на 0,1*, *то есть входят в* 0,1*-окрестность точки* A, *что все члены, начиная с какого-то, возможно, более далекого, входят в 0,01-окрестность точки* A, *что все члены, начиная с некоторого, возможно, намного более далекого, входят в 0,001-окрестность точки* A, *и т. д.*

– Короче говоря, это значит, что для всякого числа ε>0, *каким бы малым оно ни было, все члены* **f**, *начиная с какого-то, входят в* ε*-окрестность точки* A.

Таким образом, уточненное выражение твоего понимания того, что такое предел последовательности, следует сформулировать так: число A *есть предел последовательности* **f**, *если 1) чем больше* n, *тем ближе* f_n *к* A; *2) для всякого числа* ε>0, *каким бы малым оно ни было, все члены* **f**, *начиная с какого-то, входят в* ε*-окрестность точки* A.

Это выражение достаточно разумного понимания предела последовательности. Применительно ко многим значимым ситуациям оно может использоваться как определение понятия предела последовательности. Но все же является ли оно достаточно общим? Так, последовательность 1, 100, 1/2, 1/3, 1/4 … *имеет предел* 0 *в самом естественном смысле. Но это не так в твоем понимании.*

– Ситуацию можно исправить, заменив условие 1) следующим: начиная с некоторого члена, с возрастанием n *члены последовательности становятся все ближе к* A.

– В результате твое понимание предела последовательности действительно стало более общим. Но стало ли оно достаточно общим? Так, последовательность имеет предел 0 в самом естественном смысле, но это не так в твоем новом понимании.

– Эврика! Надо отбросить условие 1. И тогда новое понимание будет намного более широким, оставаясь при этом естественным, отвечающим существу дела.

– С этим должно согласиться. Итак примем следующее определение:

Число A называется пределом последовательности **f**: f_1, f_2, f_3, …, *если для всякого числа* ε>0, *каким бы малым оно ни было, все члены* **f**, *начиная с какого-то, будут входить в* ε*-окрестность точки* A, *то есть будет выполняться неравенство* $|f_n\text{-}A| < ε$.

Иными словами, число A *называется пределом последовательности если для всякой окрестности точки* A *существует номер* N *такой, что все члены с номерами, большими* N, *входят в эту окрестность.*

Вот мы и пришли к четкому пониманию того, что такое предел последовательности, и к четкому описанию такого понимания. Его естественно принять в качестве определения понятия предела последовательности.

Здесь уместно воспроизвести следующий фрагмент статьи [Когаловский, 2021]:

«Сформированное … понятие – это модель представлений, являющихся его прототипом (и включающих неявные знания). Оно предстает как продукт выделения подходящей стороны дела в этих представлениях … как в объекте эмпирического исследования, выявляемой как «существо дела». Это есть теоретическое начало, но не как противопоставляемое эмпирическому, а как «выращенное» в его лоне и предстающее в эмпирической форме, но преображенное смысловым скачком. Это пока еще скрытое теоретическое начало, пребывающее в «потенциальной» форме. Ему еще предстоит актуализироваться с помощью нового смыслового скачка и проявиться как «явно» теоретическому началу.

«Твердость и определенность» сформированного понятия открывают широкие возможности использования формально-логических средств, а тем самым возможность развивать и испытывать на надежность создаваемые на такой базе орудия поисково-исследовательской деятельности».

Естественно начать с испытания сформированного понятия на работоспособность, которое будет одновременно первичным его освоением. В процессе реализации сформированного понятия учащиеся приводятся к усмотрению качественно новых возможностей, которые оно несет, и осознанию того, что преображенное понятие является продуктивной моделью представлений, послуживших его истоком.

Начнем с вопроса о том, может ли последовательность иметь более одного предела. Пусть **f** *– какая-нибудь последовательность. Допустим, что она имеет не равные пределы* A_1 *и* A_2. *Тогда существуют непересекающиеся окрестность* U_1 *точки* A_1 *и окрестность* U_2 *точки* A_2. *Так как* A_1 *– предел* **f**, *то существует номер* N_1, *такой, что все члены последовательности, номера которых больше* N_1, *принадлежат* U_1. *Так как* A_2 *– предел* **f**, *то существует номер* N_2 *такой, что все члены, номера которых больше* N_2, *принадлежат* U_2. *Но тогда все члены, номера которых больше* N_1 *и* N_2, *принадлежат и* U_1, *и* U_2, *что невозможно*.

Важным компонентом испытания сформированного понятия на работоспособность является возвращение к задачам 1 и 2 и их решение.

– Обращение к определению понятия предела последовательности делает ясным как решить задачу 1. *Никакое число* $k<1$ *не является пределом последовательности* **c**. *Действительно, если бы такое число было пределом этой последовательности, то любая окрестность* k *содержала бы все ее члены, начиная с некоторого. Но у всякого такого числа имеется окрестность, лежащая слева от точки* 1, *и ни один член последовательности, больший* 1 (*а таких членов бесконечно много - это все члены последовательности* **b**), *не входит в такую окрестность*.

Никакое число $m \geq 1$ *не является пределом этой последовательности, так как у всякого такого числа имеется окрестность, лежащая справа от* 1/2, *и ни один член последовательности, не превосходящий* 1/2 (*а таких членов бесконечно много - это все, кроме первого, члены последовательности* **a**), *не входит в такую окрестность. Таким образом, последовательность* **c** *не имеет предела. Аналогично доказывается, что и последовательность* **d** *из задачи* 2 *не имеет предела.*

Последующему рассмотрению естественно предпослать следующий фрагмент статьи [Когаловский, 2021]: «Сформированное понятие как строгое понятие несет в себе новый смысловой скачок, осуществимый при его применениях как «погружение» ставших привычными представлений и отвечающих им способов действий в новый, необозримый, трансцендентально идеальный мир, мир трансцендирований, идеальный по отношению к ставшему привычным для учащихся математическому миру. Для его освоения необходимы формально-логические средства. Использование сформированного понятия само по себе еще не обеспечивает ни такого скачка, ни строгости. Но «очищающий» способ мышления, «настраиваемый», порождаемый формальной логикой, превращает это понятие в понятие иной природы, в понятие «трансцендентального» характера по отношению к освоенному до этого миру значений и смыслов. Именно в рамках нового мира посредством использования формально-логических средств (включающих и обыденные логико-семантические средства) происходит переосмысление и более глубокое постижение сформированного понятия как продукта преображения способа мышления и самого предмета рассмотрения. Это начинается с испытания сформированного понятия на работоспособность, являющегося одновременно первичным его освоением. Уже оно приводит учащихся к усмотрению качественно новых возможностей, несомых этим понятием, и к пониманию того, что строгость превращает его в эффективный метод»[1].

Задача 3. Доказать, что сходимость последовательности **f:** $f_1, f_2, f_3, \ldots$ к числу A равносильна сходимости к A последовательности **g**:$f_2, f_3, f_4, \ldots$

Утверждение из задачи 3 может быть выражено так: сходится последовательность или расходится и то, каков ее предел (если она сходится), не зависит ни от какого ее члена. Это совершенно новая для учащихся ситуация, заставляющая настраиваться на существенно иной способ мышления. Предполагается ее обсуждение, направленное на акцентирование качественно нового ее характера, а тем самым на лучшее постижение понятия сходимости и посредством этого на лучшее освоение процедур исследования последовательностей на сходимость.

Эта новая для учащихся ситуация выступает как ситуация парадоксальная: выходит, что свойство последовательности быть сходящейся не связано с ее «плотью»! Это похоже на улыбку чеширского кота.

Независимость свойства последовательности быть сходящейся ни от какого ее члена, ни от какого ее начального куска означает, что оно есть свойство ее «хвостов» $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$, свойство, общее для них, что это есть свойство совокупности всех ее «хвостов»[2,3]. Такое истолкование свойства последовательности быть сходящейся несет «возвращение» ему «материального тела» и тем снимает его парадоксальность.

Далее предполагается обращение к понятию подпоследовательности и к задачам, подобным следующей: доказать, что сходимость последовательности равносильна сходимости всех ее подпоследовательностей.

Решая задачи на отыскание пределов последовательностей, мы осуществляем явным образом взаимодействие интуитивного и рационального планов. Это ведет к развитию представлений о предельном переходе, венчающемуся их превращением в образное представление понятия предела.

С обсуждения следующей задачи начинается переход к следующей стадии процесса (подобной трансцендентальной редукции в смысле Гуссерля).

Задача 4. Каков предел последовательности 1,1,1,...?

– Он равен 1.

– Но разве эта последовательность приближается к какому-нибудь числу? Она постоянна. Она ни к чему не приближается.

– Если бы число 1 *было пределом последовательности, то во всякую окрестность этого числа входили бы все члены последовательности, начиная с некоторого. Но это действительно так! Более того, во всякую окрестность точки* 1 *входят все члены последовательности, потому что все они равны* 1. *А это значит, что* 1 *есть предел нашей последовательности.*

– Но это утверждение противоречит здравому смыслу! Ведь наша последовательность постоянна, она ни к чему не приближается. А то, что последовательность имеет предел А, *означает, что ее члены приближаются к* А, *что они становятся как угодно близкими к* А.

– Опять это «становится»! Как его выразить в форме, позволяющей осуществлять надежную проверку того, действительно ли последовательность «становится» все ближе к А? *Обсуждения задач* 1 *и* 2 *убеждают в том, насколько ненадежными бывают суждения, основанные на интуитивных представлениях, и в том, насколько необходимой и продуктивной бывает строгость.*

– Значит ли это, что при решении математических вопросов необходимо отказываться от представлений и использовать лишь строгие определения?

– А откуда берутся строгие определения, строгие понятия и чему в реальности они соответствуют? Где в реальной жизни Вы видели точки, прямые, плоскости, бесконечные последовательности? Разве не представления являются истоками этих и подобных понятий

– Но, как бы там ни было, последовательность 1, 1, 1,… *ни к чему не стремится!*

– Иначе говоря, определение понятия предела последовательности не вполне соответствует Вашему (и не только Вашему) представлению о том, что значит, что последовательность имеет такой-то предел.

– То есть что оно неудачно? Значит, его надо отбросить и заняться формированием удовлетворительного определения.

– Но возможно ли сформировать такое четкое определение, которое во всем соответствовало бы нашим разным, нашим размытым представлениям о пределе? Да и нужно ли это? Разве географическая карта местности бесполезна, поскольку она не тождественна самой этой местности? Разве чертеж узла машины бесполезен, поскольку он не «адекватен», не тождественен самому этому узлу? Чертеж – модель этого узла. А модель изучаемого объекта и должна быть не «адекватной» ему для того, чтобы она могла быть эффективным средством его изучения, для того, чтобы в ней выпячивались интересующие нас стороны этого объекта и чтобы при этом другие, вторичные, менее значимые, стороны дела их не затеняли.

– Таким образом, сформированное нами строгое понятие предела последовательности – это модель наших представлений о стремлении к пределу?

– Да. И оценивать его следует как модель. Если это понятие помогает решать многие интересующие нас вопросы, если оно продуктивно, то оно удовлетворительно как модель.

Важно принимать во внимание, что мы говорим о таких моделях, которые являются идеальными орудиями идеальных способов исследования идеальных объектов, принадлежащих идеальным мирам. И постольку они являются необозримо широко применимыми и надежными средствами исследования реального мира. Но исследование возможностей таких орудий и результатов их применения требует использования формально-логических средств.

– Но для одного и того же объекта можно построить много разных моделей.

– Да, это так. Нередко возникают проблемы выбора модели, многосторонних испытаний выбранной модели на продуктивность и ее совершенствования, то есть формирования более работоспособной ее модификации.

– Как с этой точки зрения следует оценить понятие предела последовательности?

– Для последовательностей (a_n), *таких, что последовательности* ($|a_n|$) *монотонны, начиная с каких-то номеров, строгое понятие предела вполне соответствует нашим интуитивным представлениям о пределе последовательности.*

Но намного более существенно то, что полуторавековой опыт истории математики подтвердил работоспособность, более того, продуктивность этого понятия.

Как видим, обращение к метапредметным планам, более того, к плану метатеоретическому явилось средством достижения понимания учащимися рассмотренной ситуации. Анализ процессов учения показывает, что восхождения к метапредметным и метатеоретическим планам, часто происходящее неосознанно, являются широко действующими механизмами понимания. Процессы восхождения от интуитивных представлений к строгим понятиям активизируют работу этих механизмов и ведут не просто к развитию понимания, но к формированию и развитию культурного и творческого понимания в смысле [Зинченко, 2002, с. 280-285].

Задача 5. Каков предел последовательности, строящейся так: между первым и вторым членами последовательности 1, 1/2, 1/3, … вставляется 10 новых членов, значения которых заключены между 1 и 1/2, между вторым и третьим – 100 новых членов, значения которых заключены между 1/2 и 1/3, между третьим и четвертым 1000 новых членов, значения которых заключены между 1/3 и 1/4, и т. д.

– Члены этой последовательности изменяются все медленней. Члены с огромными номерами изменяются ползуче медленно, непредставимо медленно. Представим автомат, совершающий переход от какого-либо ее члена к последующему за одну микросекунду. За сколько же триллионов триллионов лет он доберется до ее члена, равного 1/1000! *Ни со временем, ни чем-либо другим в объективной реальности не соотносимо не только число микросекунд, не только число тысячелетий, но и число периодов существования метагалактик, необходимое для этого. Похоже, эта последовательность сходится к какому-то не очень маленькому положительному числу.*

– Из определения понятия предела последовательности легко выводится, что она имеет предел 0*. Твое предположение говорит о том, что ты основываешься на нечетких начальных представлениях о пределе последовательности,а не на сформированном понятии предела, которое не во всем отвечает этим представлениям. Это понятие как и само понятие (бесконечной) последовательности относится к идеальному миру. И потому здесь необходимо обращаться к этому, строгому, понятию и к идеальным, формально-логическим средствам анализа рассматриваемой ситуации.*

– Но не говорит ли все это о том, что понятие предела последовательности слишком общее? Не порождает ли это слишком большой его объем, а с ним и большие логические (и не только логические) трудности?

– Обсуждению этих вопросов было бы естественно предпослать исследование того, оправдано ли понимание натурального ряда как содержащего такие непредставимо огромные числа, а тем более как неограниченно продолжимого. Но это надолго увело бы нас от предмета изучения.

Возвратимся к поставленным вопросам (которые, впрочем, тоже требуют глубокого исследования). Прежде всего, заметим, что всякое общее понятие (об объеме которого имеет смысл говорить) имеет «неоправданно» большой объем. И его оправдание, прежде всего, в его содержании. Но не менее важно и то, что исследования тонких вопросов, связанных с моделями фундаментальных математических понятий, входящими в их «неоправданно» большие объемы, способствуют не просто, не только развитию математического мышления, но открытию продуктивных методов, обогащающих как «чистую», так и прикладную математику. Об этом свидетельствует история математики.

Задача 6. Имеет ли предел последовательность, строящаяся так: ее первый член равен 1, десять следующих равны 2, сто следующих равны 3, тысяча следующих равны 4, и т. д.?

Мне кажется, что сформированное понятие предела последовательности является не излишне общим, а недостаточно общим. Рассмотрим, например, последовательность, строящуюся из последовательности 1, 1/2, 1/3, 1/4 … *так: после десятого, сотого, тысячного и т. д. ее членов вставляется* 1 (*в качестве* 11*-го*, 101*-го, и т. д. членов). Эта последовательность не имеет предела в смысле принятого определения. Но ведь члены ее, равные* 1, *попадаются все реже и реже. Они становятся исчезающее редкими, и эта последовательность становится все более похожей на последовательность* 1, 1/2, 1/3, 1/4…. *Разве не естественно видеть в ней последовательность, имеющую предел* 0? *Разве не естественней исходить из более общего понимания предела последовательности?*

– Вот как, например, можно строго определить близкое к этому четкое понимание предела последовательности. Пусть **f**: f_1, f_2, f_3, … – какая-нибудь последовательность, A – какое-нибудь число, ε – положительное число. f_n(A, ε) *будет обозначать долю тех членов* **f** *среди первых* n *ее членов, которые входят в* ε-*окрестность точки* A. *Будем говорить, что* f p-*сходится к* A *или что* A *является* p-*пределом* f, *если для всякого* ε *последовательность* f_1(A, ε), f_2(A,ε), f_3(A,ε), … *имеет предел* 1. (*Нетрудно убедиться в том, что рассмотренная тобою последовательность имеет* p-*предел* 0).

Каждое укоренившееся математическое понятие является орудием поисково-исследовательской деятельности. И разные понятия предела последовательности представляют разные орудия разных форм и направлений математической деятельности, подобно тому, как для больших или меньших углублений в земле или в каменных породах используют в одних случаях лопаты, в других экскаваторы, в третьих – буры. Естественно ли, продуктивно ли всегда для таких целей использовать какое-то одно из этих орудий?

Множество видов математической деятельности, в которых естественно и продуктивно использовать различные виды, различные подобия стремления к пределу, чрезвычайно широко. И потому естественна задача формирования общего понятия предела (функции). Существует много вариантов решения этой задачи, имеющих разные степени общности. Применение какого-либо из них к какой-либо конкретной ситуации обычно требует приспособления формы представления этого варианта к этой ситуации, то есть представления его в виде «лопаты», «экскаватора» или «бура».

Результаты исследования. Описанный процесс освоения понятия предела широко использует разные последовательности, разные характеры их сходимости и расходимости. Тем самым он широко использует средства логической семантики. В таком процессе «формальная логика функционирует как семантико-синтаксический инструмент, как неразделимое единство синтаксического и семантического планов при ведущей роли семантического плана, а значит, при ведущей роли смыслового начала и тем самым при ведущей роли механизмов понимания» [Когаловский, 2021].

Идеальный мир, в который погружается рассмотрение «очищающими» средствами формальной логики, «становится идеальным полигоном для испытаний сформированного понятия на эффективность, для совершенствования его формы, для расширения возможностей его применения, для наращивания его «дальнодействия», для наращивания «дальновидения» субъекта поисково-исследовательской деятельности. Погружение в такой «мир» несет возможность столкновений с качественно новыми ситуациями, возможность конструировать и исследовать такие ситуации. Это несет развитие фантазии и воображения учащихся, развитие их способностей к креативности, к рефлексии. Это несет развитие их способностей к использованию и развитию самого осваиваемого понятия как орудия поисково-исследовательской деятельности и как «средства производства» таких орудий. Это ведет к общему математическому их развитию, а тем самым к общему интеллектуальному развитию» [Когаловский, 2021].

Выводы. Семантический инструмент преображает механизмы ориентировки и метаориентировки, преображает способ поисково-исследовательской деятельности. Он превращает формальную логику в носитель креативности, в орудие более далеко идущего развития математических способностей учащихся, а с ним их общего интеллектуального развития.

Примечания

[1] Конечно, использование определения сформированного понятия может происходить как формальная, как «техническая» процедура, без участия механизмов понимания, без соотнесения особенностей рассматриваемой ситуации со сложившимися представлениями. В результате учащийся остается в рамках прежних представлений.

[2] Такое истолкование обсуждаемой ситуации подобно тому, как парадокс «Стрела» Зенона разрешается истолкованием движения, относящегося к тому или иному моменту времени, как характеристики, относящейся к совокупности всех (временных) окрестностей этого момента.

[3] Заметим также, что такое истолкование свойства последовательности несет потенцию восхождения к понятию предела по фильтру, а тем самым восхождения на топологический уровень рассмотрения.

Список источников

Зинченко В. П. Психологические основы педагогики (психолого-педагогические основы построения системы развивающего обучения Д. Б. Эльконина-В. В. Давыдова). Москва: Гардарики, 2002.

Когаловский С. Р. Онтогенетический подход к обучению школьников математике. Иваново : Ивановский государственный ун-т, 2018. 316 с.

Когаловский С. Р. Понятие модели и математика // Школьные технологии. 2013. № 4. С. 49-59.

Когаловский С. Р. Формальная логика как носитель креативности // Вестник Ивановского государственного университета. Серия «Гуманитарные науки». 2021. № 3. С. 134–145.

References

Zinchenko V. P. Psychological foundations of pedagogy (psychological and pedagogical foundations of building a system of developing education by D. B. Elkonin-V. V. Davydova). Moscow: Gardariki, 2002. (In Russ).

Kogalovsky S. R. Ontogenetic approach to teaching mathematics to schoolchildren. Ivanovo: Ivanovo State University, 2018. 316 p. (In Russ).

Kogalovsky S. R. Concept of model and mathematics. *Shkol'nye tekhnologii = School technologies.* 2013. no. 4. pp. 49-59. (In Russ).

Kogalovsky S. R. Formal logic as a carrier of creativity. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Gumanitarnye nauki" = Bulletin of the Ivanovo State University. Series "Humanities".* 2021. no. 3. pp. 134-145. (In Russ).

Статья поступила в редакцию 24.11.2021; одобрена после рецензирования 24.12.2021; принята к публикации 27.12.2021.

The article was submitted 24.11.2021; approved after reviewing 24.12.2021; accepted for publication 27.12.2021.